盤面の総数の一般化による数独作成への手がかり

静岡県立下田高等学校

１．動機

数独は9×9の盤面に縦横、3×3で区切られた領域に 1 から 9 までの数字を重複なく配置していくゲームであるが、ヒントの個数によって解が一意に定まらないことがある。このことが数独作成を難しくしている。そこで私たちはまず、正方形の盤面にどのようなヒントの分布の仕方があるのかを調べることにした。効率よく求めるために回転させると自身と一致するものを同じものとし、すべての盤面を求めようとしたが、簡単には求まらなかった。そこで私たちは対称なものを除いた盤面を 2 色で塗り分ける総数を考え、さらにそこから一般項を求めることを目的にした。

高校数学の問題において線分で区切られた領域を塗り分け、総数を求める問題はよく見かける。しかしながら、私たちが解決しようとしている回転させると一致するものを除いた盤面の塗り分けの問題は、90 °と 180 °回転させると一致するものの 2 種類があることに加え、考慮すべき塗り分けの数が多く、面の数が少ない場合でも実際に求めるのは容易ではない。そこで私たちは後述する方法を用いて考えた。

２．方法

総数を求めるまで回転させたものを除くため、盤面の中央のマスに関して対称なものに注目し、盤面の総数を求めた。また実際に3×3のマスの総数を求め、予想した総数が正しいのかを確かめた。次に、4×4のマスの総数を求めようとしたが、数が多すぎると予想したため書き出す方法は断念し、一般項を求めてから計算した。一般式は$n\times n$でnが奇数の場合と偶数の場合で分けて求めた。求める方法として奇数の場合、総数の求まっている3×3のマスを例に挙げて考えた。まず、180 °回転すると自身と一致する配置の個数を求めるために中央のマスを軸にして 180 °回転させた位置に同じ数字をそれぞれ当てはめ、軸にした中央のマスにも数字を当てはめる。すると、どの数字のマスを塗っても２つ合同なものが存在する配置になる［図１］。次に、90 °回転すると自身と一致する配置の個数を求めるために中央のマスを軸にして 90 °回転させた位置に同じ数字をそれぞれ当てはめ、軸にした中央のマスにも数字を当てはめる。すると、どの数字のマスを塗っても４つ回転させると自身と一致するものが存在する配置になる［図１］。

偶数の場合、4×4のマスを例に挙げて考えた。まず、上２列のマスに１つずつ数字を当てはめ、中央を軸として 180°回転させた位置に同じ数字を当てはめる。すると、どの数字のマスを塗っても２つ回転させると自身と一致するものが存在する配置になる。次に、左上の 4 マスに１つずつ数字を当てはめ、中央を軸として 180°回転させた位置に 3 マスずつそれぞれ数字を当てはめる。すると、どの数字のマスを塗っても４つ自身と一致するものが存在する配置になる。奇数、偶数のどちらの場合でも 180 度回転させると一致するものは 90 度回転させると一致するものに含まれ、対称性を考慮しない場合 180 度の場合２つ、90 度の場合４つできるため重複した分だけ割ることで重複をなくす。以上のように考えることで偶数の場合と奇数の場合それぞれで一般化をして総数を求める式を導出した［図２］。

３．結果

導出した一般項［図２］があっているか確かめるためにnが 1,2,3 のときの場合を考えた。数え上げた個数と式から得られた個数は一致した。これにより回転させても一致するものを探し出さなくても盤面の総数を求めることができた。数え上げた数値と数式による数値が一致したため式があっていることが確かめられた。求めた式を使うことにより、数え上げる場合よりも時間を短縮できた。

一辺のマス数 n	1	2	3
盤面の総数 a_n	2	8	140

４．考察

盤面のすべてを数え上げて、総数を求めることは時間がかかる。今回、対称性に注目した式を求めたことで代入して計算するだけで求めることができるようになった。また一般項を求めたことで通常、数独の盤面は 9×9 であるが盤面の数をさらに増やした数独を考えることができるようになった。

５．図表

1	2	3	1
3	4	5	3
2	5	4	2
1	3	2	1

1	2	1
2	3	2
1	2	1

［図１］　3×3および4×4の盤面のとき回転させると一致する組

$n \times n$の盤面の総数a_nは

n**が偶数のとき**

$$a_n = \frac{1}{4}\left(2^{n^2} - 2^{\frac{n^2}{2}}\right) + \frac{1}{2}\left(2^{\frac{n^2}{2}} - 2^{\frac{n^2}{4}}\right) + 2^{\frac{n^2}{4}}$$

n**が奇数のとき**

$$a_n = \frac{1}{4}\left(2^{n^2} + 2^{\frac{n^2+3}{4}}\right) + \frac{1}{2}\left(2^{\frac{n^2+3}{4}} + 2^{\frac{n^2+1}{2}}\right) + 2^{\frac{n^2+1}{2}}$$

［図２］　私たちが求めた一般項